دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۸/۲۳
پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۰۹/۰۹

فصلنامهٔ مدیریت نظامی
سال هفدهم، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۳۹۶
ص‌ص ۱-۱۸

یک مدل ریاضی برای مدیریت بحران کالای نظامی و یک روش عددی ساده برای حل آن

دکتر غلامرضا کرمعلی[۱]، امیر هاشمی[۲]

چکیده

اخیراً پیشرفت‌های زیادی در مدل‌سازی مدیریت بحران مالی به کمک مدل‌های ریاضی حاصل شده است. آیا می‌توان پیشرفت‌های جدید در مدل‌سازی را برای مدیریت بحران نظامی نیز به کار برد ؟ هدف اصلی این مقاله چنین تعمیمی است. احتمال صفر نشدن ذخایر کالا در یک معادلهٔ انتگرال دیفرانسیل جزئی ولترا صدق می‌کند. جواب دقیق مدل مذکور، اغلب به صورت بسط نامتناهی از توابع شناخته شده، وجود دارد. بنابراین، حل این مسئله با روش‌های عددی امکان‌پذیر است. از این رو، در این مقاله روشی جدید و ساده بر اساس فرآیندهای تصادفی برای حل مسئله یاد شده با بهره‌گیری از روش تحقیق «تحقیق و توسعه» ارائه می‌نماییم. برای این منظور بسط لاگرانژ را به عنوان تقریبی از جواب استفاده می‌کنیم. سپس با استفاده از روش‌های هم محلی، می‌توان معادلهٔ انتگرال دیفرانسیل جزئی را به یک دستگاه جبری تبدیل و آن را حل نمود. مثال‌های ارائه شده کارایی و دقت روش معرفی شده را نشان می‌دهند. در نهایت از این روش برای تحلیل یک مدل از مدیریت بحران نظامی که جواب دقیق آن شناخته شده نیست، استفاده می‌کنیم.

واژگان کلیدی: مدیریت بحران، فرآیندهای تصادفی، معادله انتگرال دیفرانسیل جزئی، روش‌های عددی.

---

۱. استادیار ریاضی کاربردی، دانشگاه علوم و فنون شهید ستاری، (نویسنده مسئول) ✉ gh-karamali@azad.ac.ir
۲. کارشناس ارشد آمار ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود

مقدمه

کشورهای در حال توسعه به دلایل متعدد از جمله عدم استقرار ثبات سیاسی همواره در معرض بحران های اجتماعی و سیاسی قرار دارند. جوامع انقلابی و مذهبی، اصولاً به اقتضای طبیعت و هویت‌شان، جوامع بحران‌زا می‌باشند. در چنین جوامعی، یک تداخل و برخورد ساده میان سیاست و قضاوت، یک تلاقی نابهنجار و نابهنگام و یا چند گفتمان و گرایش سیاسی- ایدئولوژیکی متفاوت، یک شرایط دفعی فقدان تصمیم‌گیری و یا یک گره‌خوردگی غیر قابل پیش بینی در سطحی از سطوح نظام، می‌تواند به چالشی شالوده‌شکن تبدیل گردد. ایران بعد از انقلاب نیز به دلایل متعدد از جمله رویارویی با فرهنگ و تمدن جاری جهان امروزی و مقابله با اشکال نوین استثمار و استبداد قدرت‌های برتر، از این قاعده مستثنی نبوده و نیست. بستر اجتماعی- سیاسی متلاطم و جوشان بعد از انقلاب، مفهوم «بحران» را در بطن و متن زندگی روزمره و ادبیات عامیانه ایرانی نشانده است. بی‌تردید، تصمیم‌سازان هر جامعه‌ای که نتوانند «راه‌حل» قسمتی از بحران‌ها و مشکلات باشند، به طور فزاینده‌ای خود به جزئی از «مشکل» تبدیل می‌شوند.

تعریف بحران سازمانی

مفهوم بحران می‌تواند به معنای انحراف از وضعیت تعادل عمومی رابطه سازمان با محیط یا تعریفی از خصوصیت محیطی باشد که سازمان مجبور است به صورت مستمر از آن اگاهی داشته باشد. در هر یک از این دو نگرش، انجام مسائل بحران در یک دیدگاه مدیریت راهبردی به بهترین وجه قابل درک است. یک بحران سازمانی فقط یک فاجعه مانند یک رکود اقتصادی، سقوط یک هواپیما و یا محدود کردن شرکت‌هایی نیست که باعث تلفات عظیم و یا خسارات شدید محیطی می‌شوند، بلکه می‌تواند دارای شکل‌های متنوعی مانند بدنام شدن محصول، مخدوش شدن خدمات پشتیبانی کننده، تحریم کردن محصولات، اعتصاب، شایعات هسته‌ای جنجال‌آمیز، دزدیده شدن، رشوه‌دهی و رشوه‌خواری، درگیری خصومت‌آمیز، بلایای طبیعی در جهت انهدام محصولات، خراب شدن سیستم اطلاعات سازمانی و یا سیستم اطلاعات شرکت‌های مادر است.

مدیریت بحران

بر اساس نظرات پیرسون[1] و کلایر[2] (۱۹۹۸)، مدیریت بحران عبارت است از تلاش نظام‌یافته از طریق اعضای سازمان همراه با ذی‌نفعان خارج از سازمان، در جهت پیشگیری از بحران‌ها و یا مدیریت اثربخش آن در زمان وقوع. مدیریت بحران از سه مرحله اصلی تشکیل شده است؛ مدیریت بحران قبل، حین و بعد از وقوع بحران. قبل از وقوع بحران باید سه فعالیت کلیدی صورت گیرد: تشکیل تیم مدیریت بحران در سازمان، ایجاد یک سناریویی که بدترین حالت ممکن را نشان دهد و تعریف رویهٔ اجرایی استاندارد برای انجام فعالیت‌هایی قبل از وقوع بحران.

بیان مسئله

در این میان نیروهای مسلح، نقش کلیدی و قابل ملاحظه‌ای در راه حل مذکور برعهده دارند. از طرفی مواجهه با شرایط غیرعادی، ممکن است باعث ایجاد اختلال در روند فعالیت‌های سازمان‌های درگیر گردد؛ بنابراین نیاز به برنامه‌ریزی و ایجاد سازوکاری جهت مواجه نشدن با اختلالات ممکن، احساس می‌گردد. از این رو موضوع «مدیریت بحران» به عنوان یکی از مهمترین مباحث علمی-کاربردی مطرح می‌شود که امروزه کشورهای مختلف، مخصوصاً کشورهای توسعه یافته و در حال توسعه، به آن متمایل شده‌اند. به طوری که در بسیاری از کشورهای پیشرفته و در حال توسعه، مراکزی برای استقرار فعالیت‌های مدیریت بحران به نام «مرکز مدیریت بحران» وجود دارد که کلیه مراحل و فرآیندهای مدیریت بحران در این مکان ها صورت می‌گیرد.

نتایج به دست آمده از مدل‌های ریاضی کمک شایانی در انتخاب تصمیم درست و سریع به مدیران می‌دهند. پدیده‌های مختلف همچون مسائل جدید نظامی، می‌توانند از طریق مدل‌های ریاضی شبیه‌سازی شوند. برای نمونه به مطالعات خیرگو و همکاران (۱۳۹۵)؛ اخروی و همکاران (۱۳۹۴)؛ ملکی و همکاران، (۱۳۹۵) می‌توان اشاره کرد. اخیراً شاهد پیشرفت‌های زیادی در مدیریت بحران ذخایر مالی از طریق پیشرفت در مدل‌های ریاضی بوده‌ایم. در این مطالعه سؤال تحقیق بدین گونه است که آیا پیشرفت‌های جدید در مدل‌های ریاضی می‌توانند در مدیریت بحران نظامی نیز کارا باشد؟ برای این منظور، یک مدل ریاضی جدید برای مدیریت بحران

1. Pearson
2. Clair

نظامی بسط داده و روش عددی ساده‌ای برای حل آن پیشنهاد خواهیم کرد. این مدل از پیشرفت‌های مدرن ریاضی بهره می‌جوید.

مدل انتگرال دیفرانسیل جزئی

این مدل برای بازهٔ زمانی متناهی $[0,t]$ طراحی شده است که در آن t یک عدد حقیقی مثبت متناهی است. فرض می‌کنیم ذخیره کالاهای نظامی در طول دوره مدل‌سازی فاسد یا خراب نشود. میزان ذخیره کالا در زمان s را با $Z(s)$ نشان می‌دهیم. مقدار موجودی در ثانیه اول را با z نشان می‌دهیم $Z(0)=\mathrm{z}$.

برای یک مدیر، لازم است که ذخایر کالاهای اساسی به هیچ وجه صفر نشود. بنابراین، پیدا کردن ضابطهٔ تابع $R(\mathrm{t,z})$ که نشان دهندهٔ احتمال صفر نشدن ذخایر کالای اساسی در طول بازهٔ $[0,\mathrm{t}]$ با فرض مقدار اولیه موجودی z، بسیار مهم است. بنابراین $R(t,z)=P[Z(s)>0, 0\le s\le t \mid Z(0)=z]$. هدف پیدا کردن $R(\mathrm{t,z})$ با استفاده از مدل‌های اخیر است که در آن فرض زیر بدیهی است:

مقدار موجودی مصرف شده $-$ مقدار موجودی اضافه شده $+$ مقدار اولیه موجودی $=$ مقدار موجودی کالا

به علاوه، فرض معقولی است که آهنگ موجودی اضافه شده، تابعی از مقدار موجودی جاری باشد. اگر مقدار موجودی حاضر زیاد باشد، نیاز به افزایش موجودی نیست و اگر کم باشد، یک مدیر می‌تواند میزانی را به آن اضافه کند. اگر مقدار موجودی کالا در زمان حاضر را با $\mathrm{z}(r)=r$ نشان دهیم، آنگاه می‌توانیم فرض کنیم که آهنگ موجودی اضافه شده برابر تابعی مانند $\beta(r)$است. بنابراین، مشتق موجودی اضافه شده نسبت به زمان، برابر با $\beta(r)$است و می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{dZ(t)}{dt}=\beta(Z(t)).$$

معرفی مدلی دقیق از مقدار موجودی مصرف شده تا زمان جاری، معمولاً سخت است. بنابراین، از یک مدل احتمالی برای این موجودی استفاده می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم میزان موجودی مصرف شده در زمان t یک فرآیند تصادفی مانند X_t است. تابع چگالی متغیر تصادفی X_t را با $b(x)$ نشان می‌دهیم. همچنین تابع توزیع متغیر تصادفی X_t را به صورت

زیر داریم:

$B(x) = P([X_t \le x])$

فرآیند تصادفی پواسون[۱] با پارامتر λ رایج‌ترین فرآیندی است که در این گونه مدل‌ها استفاده می‌شود. این فرآیند را معمولاً با N_t نشان می‌دهند. با در نظر گرفتن این فرض‌ها، مدل انتگرال دیفرانسیل جزئی معادله (۱,۱) ارائه شده است (آرفدسون[۲]،۲۰۰۱؛ گراندل[۳]،۱۹۹۱؛کنسل و همکاران[۴]،۱۹۹۴،۱۹۹۶؛ پیترز[۵]،۱۹۹۰).

$$\frac{\partial R(z,t)}{\partial t} = -\lambda R(z,t) + \beta(z)\frac{\partial R(z,t)}{\partial z} + \lambda\int_0^z b(z-y)R(y,t)dy. \quad (۱,۱)$$

برای اینکه معادله (۱,۱) جواب یکتا داشته باشد، نیاز به مقادیر اولیه یا مـرزی داریـم. از آنجا که $Z(0)=z$، پس احتمال صفر شدن موجودی z در *زمان صفر*، یک است و داریم:

$$R(z,0) = 1. \quad (۲,۱)$$

به علاوه اگر موجودی نامتناهی باشد، بحرانـی وجـود نـدارد و موجـودی در هـیچ دوره‌ای از زمان صفر نخواهد شد. بنابراین شرط مرزی (۳,۱) نیز از شرایط مرزی واضح مدل اسـت. حـال، معادله‌های (۱,۱)-(۳,۱) مدل ریاضی جدید را مشخص می‌کننـد. در ایـن مقالـه مـا یـک روش عددی ساده برای حل معادله بسیار مهم (۱,۱)-(۳,۱) نیز ارائه می‌دهیم.

$$\lim_{z\to\infty} R(z,t) = 1 \quad (۳,۱)$$

پیشینۀ تحقیق

حل معادله (۱,۱)-(۳,۱) با روش‌های تحلیلی به وسیلۀ آلبریچر[۶]، (۲۰۰۱)؛ ویلـدر و همکـاران[۷]، (۱۹۹۹)؛ ایگناتوف و همکاران[۸]، (۲۰۰۱)؛ کنسل و همکاران[۹]، (۱۹۹۴، ۱۹۹۶)؛ پروزوانسـکی[۱۰]،

1. poisson process
2 .G. Arfwedson
3. J. Grandell
4. C. Knessl and C. S. Peters
5. C. S. Peters and M. Mangel
6. H. Albrecher
7. F. E. De Vylder and M. J. Goovaerts
8. Z. G. Ignatov, V. K. Kaishev and R. S. Krachunov.
9 .C. Knessl and C. S. Peters

پروزوانسکی[۱]، (۱۹۹۸)؛ پیترز[۲]، (۱۹۹۰)؛ سی‌ال[۳]، (۱۹۷۴، ۱۹۷۸)، برای حالت‌های خاص مورد مورد بررسی قرار گرفته است. هر چند روش‌های عددی برای حل این معادلات کمتر مطالعه شده است. ماکروغلو[۴]، (۲۰۰۳،۲۰۰۰) به تازگی روش‌هایی عددی برای حل حالت‌های خاصی از از این معادلات پیشنهاد کرده است. همچنین، یوزابل[۵] (۱۹۹۹) نیز از یک روش عددی استفاده استفاده کرده است.

اهمیت و ضرورت تحقیق

حل عددی معادله (۱،۱)-(۳،۱) در مدیریت و کنترل بحران بسیار مهم است، چون نمی‌توان برای توابع پیچیده‌ی $b(x)$ و $B(r)$ حل تحلیلی یافت. به علاوه، حل عددی این معادلات می‌تواند به نرم‌افزاری کاربردی تبدیل شود که با سرعت زیادی این معادلات را حل کند و مورد استفاده مدیران قرار بگیرد. ماکروغلو[۶]، (۲۰۰۳،۲۰۰۰) با تقریب معادله، نسبت به مؤلفهٔ z توانست سیستم معادلات انتگرال جزئی (۱،۱)-(۳،۱) را به سیستم معادلات دیفرانسیلی معمولی تبدیل کند و سپس با حل آن، جواب عددی را پیدا کند؛ ولی راه‌حل او دارای معایبی است. یکی از این معایب، بعد زیاد سیستم معادلات دیفرانسیلی معمولی است که در این صورت زمان حل آن را افزایش می‌دهد. ایراد دیگر آن، سخت[۷] بودن سیستم به دست آمده است؛ بنابراین، ما روش عددی جدیدی پیشنهاد می‌کنیم که معایب بیان شده را رفع می‌کند. این روش بسیار سریع است و نیاز به حل دستگاه معادلات دیفرانسیل در آن نیست.

سؤال تحقیق

در این تحقیق، سؤالی که با آن روبرو هستیم، این است که آیا پیشرفت‌های اخیر در مدل‌های ریاضی به خصوص حل معادلات انتگرال دیفرانسیل جزئی از طریق روش عددی مطرح شده، می‌تواند در مدل‌سازی مدیریت بحران نظامی کارا باشد؟

1. A. A. Pervozvansky Jr.
2. C. S. Peters and M. Mangel
3. H. L. Seal
4. A. Makroglou
5. M. Usabel
6. A. Makroglou
7. Stiff

روش تحقیق

روش تحقیق ایـن مطالعـه از نـوع تحقیـق و توسـعه اسـت. ابـزار جمـع‌آوری اطلاعـات، منـابع کتابخانه‌ای و الکترونیکی می‌باشد. با عنایت به مطالعات صورت گرفته، به منظور مدیریت بحران نظامی کالا، ابتدا تخمینی از تابع آهنگ تغییرات موجودی کالا $\beta(Z(t))$ را به دست می‌آوریـم. این تابع به میزان سرمایه و نوع راهبرد سازمان مربوطه و همچنین مقدار مصـرف کـالا بسـتگی دارد. نمونه‌هایی از چنین راهبرد مدیریت در مثـال‌هـای ۱ و ۲ کـاملاً مشـخص اسـت. سـپس، تخمینی از آهنگ موجودی مصرف شده، خرج شده و یا به‌کار رفته با توجه بـه نـوع مسـأله بـه دست می‌آوریم. معمولاً برای فرآیندهای تصادفی شمارشـی بـا آهنـگ ثابـت، فرآینـد تصـادفی پواسون تابع مربوطه یعنی $b(x)$ را کاملا مشخص می‌کند. حال، می‌توانیم معادلـه‌هـای مربوطـه (۱،۱) را کاملاً مشخص کنیم. با حل این معادله ما میزان بحران را در آینده با توجه بـه راهبـرد $\beta(Z(t))$ می‌سنجیم و با عنایت به نتایج حل مؤلفه‌هـای آزاد، مـدیر، $\beta(Z(t))$ را طـوری تغییـر می‌دهد که احتمال بحران کمتر شود.

مفروضات مدل ارائه شده

- مهمترین فرض این است که کالای نظامی، بودجه نظامی، منابع مهم نظامی، مهمات نظامی و غیره که مدیریت بحران آن را مدل‌سازی می‌کنیم، در طول زمان فاسد نشود یا از بین نرود، یا ارزش آن افزایش یا کاهش پیدا نکند. به عنوان مثال اگر بحران فوق، درباره ذخیره غذا در یک سازمان نظامی باشد، فرض مهم این است که آن ماده غذایی در طول زمان مدل‌سازی شده فاسد نخواهد شد. اگر این مدل برای یک بودجه نظامی بر اساس ریال باشد، فرض اساسی در این مدل این است که ارزش ریال در طول زمان شبیه‌سازی شده ثابت است؛
- فرض دیگر این است که آهنگ موجودی مصرف شده، خرج شده و یا به‌کار رفته از یک فرآیند تصادفی معلوم مانند فرآیند تصادفی پواسوون یا برنولی یا نرمال تبعیت می‌کند و متوسط این آهنگ نیز در روز یا ماه یا سال قابل تخمین است؛

- فرض آخر این است که کالا، بودجه، منابع، موجودی، ثروت و غیره در مسئله متناظر نظامی بی‌نهایت نیست و تمام‌شدنی است.

روش عددی ارائه شده برای حل معادلهٔ مدیریت بحران

برای حل عددی، به جای شرط مرزی (۳,۱) که در بی‌نهایت محاسبه می‌شود، از شرط مرزی (۴,۱) به ازای L به حد کافی بزرگ استفاده می‌کنیم و جواب‌ها را با این انتخاب، مقایسه می‌کنیم. فرض کنید دامنهٔ جواب در معادلهٔ (۱,۱)-(۳,۱)، $I=[0,L]\times[0,t]$ باشد.

$$R(L,t)=1 \qquad (۴,۱)$$

این دامنه را به صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$X_I := \{z_n : 0 \le z_0 < z_1 < \ldots < z_p = L\} \times \{t_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{\hat{p}} \le t\},$$

که در آن $p,\hat{p}\in\mathbb{N}$.

فرض می‌کنیم $U^{i,j} := u(z_i,t_j)$ و جواب تقریبی در گره‌ها افراز X_I، به ازای $i=0,\ldots,p$ و $j=0,\ldots,\hat{p}$ است. حال، بسط لاگرانژ $u(t,z)$ را روی I می‌توانیم به صورت معادله (۵,۱) بنویسیم:

(۵,۱)

$$u(t,z)=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{\hat{p}} L_i(z)\bar{L}_j(t)U^{i,j}+\sum_{j=0}^{\hat{p}} L_p(z)\bar{L}_j(t)U^{p,j}+\sum_{i=0}^{p-1} L_i(z)\bar{L}_0(t)U^{i,0},\ \ s\in(0,1],$$

که در آن:

$$L_i(z):=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{p}\frac{z-z_k}{z_i-z_k},\ \ \bar{L}_j(t):=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{\hat{p}}\frac{t-t_k}{t_j-t_k},$$

به ازای $i=0,\ldots,p$ و $j=0,\ldots,\hat{p}$ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ هستند.

با جایگذاری این تقریب در معادله (۱,۱) داریم:

(۶,۱)

$$\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{\hat{p}} L_i(z)\bar{L}_j'(t)U^{i,j}+\sum_{j=0}^{\hat{p}} L_p(z)\bar{L}_j'(t)U^{p,j}+\sum_{i=0}^{p-1} L_i(z)\bar{L}_0'(t)U^{i,0}=$$
$$-\lambda\left(\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{\hat{p}} L_i(z)\bar{L}_j(t)U^{i,j}+\sum_{j=0}^{\hat{p}} L_p(z)\bar{L}_j(t)U^{p,j}+\sum_{i=0}^{p-1} L_i(z)\bar{L}_0(t)U^{i,0}\right)$$
$$+\beta(z)\left(\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{\hat{p}} L_i'(z)\bar{L}_j(t)U^{i,j}+\sum_{j=0}^{\hat{p}} L_p'(z)\bar{L}_j(t)U^{p,j}+\sum_{i=0}^{p-1} L_i'(z)\bar{L}_0(t)U^{i,0}\right)$$
$$-\lambda\int_0^z b(z-y)\left(\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{\hat{p}} L_i(y)\bar{L}_j(t)U^{i,j}+\sum_{j=0}^{\hat{p}} L_p(y)\bar{L}_j(t)U^{p,j}+\sum_{i=0}^{p-1} L_i(y)\bar{L}_0(t)U^{i,0}\right)dy,$$

به ازای $i=0,\ldots,p$ و $j=0,\ldots,\hat{p}$.

اکنون با جایگذاری $t=t_k$ و $z=z_l$ و استفاده از فرمول‌های $L_i(z_l)=\delta_{il}$ و $L_j(t_k)=\delta_{jk}$ در معادلهٔ (۶,۱) داریم:

$$\sum_{j=1}^{\hat{p}}\bar{L}_j'(t_k)U^{l,j}+\bar{L}_0'(t_k)U^{l,0}=$$
$$-\lambda U^{l,k}+\beta(z_l)\sum_{i=0}^{p-1}L_i'(z_l)U^{i,k}+\beta(z_l)L_p'(z_l)U^{p,k} \qquad (۷,۱)$$
$$-\lambda\int_0^z b(z-y)\left(\sum_{i=0}^{p-1}L_i(y)U^{i,k}+L_p(y)U^{p,k}\right)dy.$$

در نهایت، با ساده کردن معادله (۷,۱)، دستگاه معادلهٔ جبری (۸,۱) را داریم:

$$\sum_{j=1}^{\hat{p}}\bar{L}_{j'}(t_k)U^{l,j}+\lambda U^{l,k} \qquad (۸,۱)$$
$$+\sum_{i=0}^{p-1}\left(-\beta(z_l)L_{i'}(z_l)+\lambda\int_0^{z_l}b(z_l-y)L_i(y)dy\right)U^{i,k}=$$
$$+\beta(z_l)L_p'(z_l)U^{p,k}-\bar{L}_0'(t_k)U^{l,0}-\lambda\int_0^{z_l}b(z_l-y)L_p(y)dyU^{p,k}.$$

همچنین، با استفاده از شرایط مرزی:

$$U^{p,k}=g(t_k)\,\square\,1, \qquad (۹,۱)$$

به ازای L به حد کافی بزرگ و:

$$U^{i,0}=1. \qquad (۱۰,۱)$$

معادلات (۸,۱)-(۱۰,۱) دستگاه معادلات خطی است که به سادگی می‌توانند با روش‌های جبر خطی عددی حل شوند و با حل آنها جواب معادله (۱,۱)-(۳,۱) از معادله (۵,۱) به دست می‌آید.

یافته‌ها

مثال ۱: برای بعضی از توابع شناخته شده $b(x)$و$B(r)$ جواب دقیق معادلـهٔ (۱,۱)-(۳,۱) معلـوم است. این جواب برای نشان دادن کارایی روش مطرح شده و مقایسهٔ جواب دقیـق مفیـد اسـت. برای مثال فرض کنید:

$$b(x)=\alpha e^{-\alpha x}, \qquad \beta(z)=\beta_0+\gamma z$$

که در آن α، β_0 و γ اعداد حقیقی هستند. معمولاً α با میانگین نسبت معکوس دارد. کنسل و همکاران[1]، (۱۹۹۴،۱۹۹۶) و ماکروغلو[2]، (۲۰۰۰،۲۰۰۳) نشان دادند که با فرض‌های فوق جواب دقیق مسأله به صورت (۱۱,۱) است:

$$R(z,t)=1-\frac{\gamma}{\gamma+\alpha\beta_0}e^{-\alpha z}(1-e^{-(\gamma+\alpha\beta_0)t}), \qquad (11,1)$$

واضح است که در نقطهٔ مرزی L داریم:

$$R(L,t)=g(t)=1-\frac{\gamma}{\gamma+\alpha\beta_0}e^{-\alpha L}(1-e^{-(\gamma+\alpha\beta_0)t}). \qquad (12,1)$$

در تمامی مثال‌های زیر قرار می‌دهیم:

$$\alpha=1, \beta_0=2, \gamma=1.$$

جدول‌های ۱ و ۲ مقایسه‌ای از جواب دقیق و عددی را برای $z=1$ و $z=2$ نشان می‌دهـد. این جدول‌ها برای حالت $L=3$ و $t=10$ محاسبه شده است. همان طور که مشاهده مـی‌شـود خطا، مضربی از 10^{-9} است که نشان می‌دهـد روش عـددی پیشـنهادی عـالی اسـت. همچنـین، جدول‌های ۱ و ۲ مقایســه‌ای از جـواب‌هـای دقیـق و عـددی بـه ازای $z=1$، $z=2$، $L=9$ و $t=10$ را نشان می‌دهند. همان طور که مشاهده می‌شود خطا مضربی از 10^{-8} اسـت کـه نشـان می‌دهد روش عددی برای این حالت نیز عالی است. در جدول‌های ۱ تا ۴ از مقادیر دقیق مرزی که توسط فرمول (۱۲,۱) محاسبه می‌شود، استفاده کردیم. ولی در عمل، این مقادیر را بـرای L مشخص، در اختیار نداریم. لذا، از تقریب (۹,۱) استفاده خواهیم کرد. جـدول‌هـای ۵ و ۶ نتـایج عددی را برای این حالت نشان می‌دهد.

1.C. Knessl and C. S. Peters
2. A. Makroglou

جدول ۱: مقایسه جواب عددی و جواب دقیق معادلهٔ (۱,۱)-(۳,۱): L=3، z=1، T=10،
$\Delta t = 0.5$ و $\Delta z = 0.2$.

t	جواب دقیق	جواب عددی	خطا
۱	۰,۸۸۳۴۷۸۷۳۲۵۷۲۴۳۱	۰,۸۸۳۴۸۰۰۰۶۹۹۷۷۷۷	۱,۲۷۴۴ × ۱۰ -۶
۲	۰,۸۷۷۶۷۷۴۸۰۲۶۴۷۰۴	۰,۸۷۷۶۷۷۴۹۴۲۵۱۷۳۳	۱,۳۹۸۷ × ۱۰ -۸
۳	۰,۸۷۷۳۸۸۶۵۲۹۱۹۴۴۰	۰,۸۷۷۳۸۸۶۵۴۲۳۳۵۷۸	۱,۳۱۴۱ × ۱۰ -۹
۴	۰,۸۷۷۳۷۴۲۷۳۰۵۲۶۵۵	۰,۸۷۷۳۷۴۲۷۴۲۱۹۸۳۵	۱,۱۶۷۲ × ۱۰ -۹
۵	۰,۸۷۷۳۷۳۵۵۷۱۲۱۲۴۴	۰,۸۷۷۳۷۳۵۵۸۰۳۴۱۷۴	۹,۱۲۹۳ × ۱۰ -۱۰
۶	۰,۸۷۷۳۷۳۵۲۱۴۷۷۱۱۸	۰,۸۷۷۳۷۳۵۲۳۲۹۵۱۶۶	۱,۸۱۸۰ × ۱۰ -۹
۷	۰,۸۷۷۳۷۳۵۱۹۷۰۲۵۰۱	۰,۸۷۷۳۷۳۵۲۱۳۹۴۲۲۳	۱,۶۹۱۷ × ۱۰ -۹
۸	۰,۸۷۷۳۷۳۵۱۹۶۱۴۱۴۹	۰,۸۷۷۳۷۳۵۲۰۸۲۵۰۲۱	۱,۲۱۰۹ × ۱۰ -۹
۹	۰,۸۷۷۳۷۳۵۱۹۶۰۹۷۵۰	۰,۸۷۷۳۷۳۵۱۸۷۱۷۰۰۵	۸,۹۲۷۴ × ۱۰ -۱۰
۱۰	۰,۸۷۷۳۷۳۵۱۹۶۰۹۵۳۱	۰,۸۷۷۳۷۳۱۴۵۸۶۷۷۹۷	۳,۷۳۷۴ × ۱۰ -۷

جدول ۲: مقایسه جواب عددی و جواب دقیق معادلهٔ (۱,۱)-(۳,۱): **L=3، z=2، T=10،** $\Delta t = 0.5$ و $\Delta z = 0.2$.

t	جواب دقیق	جواب عددی	خطا
۱	۰,۹۵۷۱۳۴۲۲۱۲۵۴۱۵۸	۰,۹۵۷۱۳۴۴۸۲۷۸۲۵۳۳	۲,۶۱۵۳ × $۱۰^{-۷}$
۲	۰,۹۵۵۰۰۰۰۵۹۷۹۷۰۹۷	۰,۹۵۵۰۰۰۰۶۶۰۸۴۴۷۷	۶,۲۸۷۴ × $۱۰^{-۹}$
۳	۰,۹۵۴۸۹۳۸۰۶۱۵۴۷۲۶	۰,۹۵۴۸۹۳۸۰۷۶۲۹۷۱۳	۱,۴۷۵۰ × $۱۰^{-۹}$
۴	۰,۹۵۴۸۸۸۵۱۶۰۹۷۳۶۹	۰,۹۵۴۸۸۸۵۱۷۰۹۷۲۹۸	۹,۹۹۹۳ × $۱۰^{-۱۰}$
۵	۰,۹۵۴۸۸۸۲۵۲۷۲۰۹۲۱	۰,۹۵۴۸۸۸۲۵۳۶۱۰۷۲۰	۸,۸۹۸۰ × $۱۰^{-۱۰}$
۶	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۹۶۰۸۱۸۰	۰,۹۵۴۸۸۸۲۴۱۵۱۳۱۳۳	۹۰۵۰.۱ × $۱۰^{-۹}$
۷	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۸۹۵۵۳۳۵	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۹۴۴۴۱۳۶	۴,۸۸۸۰ × $۱۰^{-۱۰}$
۸	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۸۹۲۲۸۳۲	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۸۵۵۴۸۰۵	۳,۶۸۰۳ × $۱۰^{-۱۰}$

t	جواب دقیق	جواب عددی	خطا
۹	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۸۹۲۱۲۱۴	۰,۹۵۴۸۸۸۲۲۰۷۱۱۷۱۹	۱,۸۲۰۹ × $۱۰^{-۸}$
۱۰	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۸۹۲۱۱۳۳	۰,۹۵۴۸۸۶۷۰۹۰۴۷۱۱۰	۱,۵۲۹۹ × $۱۰^{-۶}$

جدول ۳: مقایسه جواب عددی و جواب دقیق معادلهٔ (۱,۱)-(۳,۱): *L=9*، *z=1*، *T=9*،
$\Delta t = 0.5$ و $\Delta z = 0.5$.

t	جواب دقیق	جواب عددی	خطا
۱	۰,۸۸۳۴۷۸۷۳۲۵۷۲۴۳۱	۰,۸۸۳۴۹۳۳۸۸۳۷۰۹۸۸	۱,۴۶۵۶ × ۱۰ -۵
۲	۰,۸۷۷۶۷۷۴۸۰۲۶۴۷۰۴	۰,۸۷۷۶۷۸۱۷۳۰۹۸۲۸۰	۶,۹۲۸۳ × ۱۰ -۷
۳	۰,۸۷۷۳۸۸۶۵۲۹۱۹۴۴۰	۰,۸۷۷۳۸۸۷۰۸۷۵۱۷۹۶	۵,۵۸۳۲ × ۱۰ -۸
۴	۰,۸۷۷۳۷۴۲۷۳۰۵۲۶۵۵	۰,۸۷۷۳۷۴۲۹۹۰۸۴۵۶۴	۲,۶۰۳۲ × ۱۰ -۸
۵	۰,۸۷۷۳۷۳۵۵۷۱۲۱۲۴۴	۰,۸۷۷۳۷۳۵۸۲۱۱۴۱۸۷	۲,۴۹۹۳ × ۱۰ -۸
۶	۰,۸۷۷۳۷۳۵۲۱۴۷۷۱۱۸	۰,۸۷۷۳۷۳۵۴۶۴۲۸۶۳۷	۲,۴۹۵۲ × ۱۰ -۸
۷	۰,۸۷۷۳۷۳۵۱۹۷۰۲۵۰۱	۰,۸۷۷۳۷۳۵۴۱۸۶۵۰۵۶	۲,۲۱۶۳ × ۱۰ -۸
۸	۰,۸۷۷۳۷۳۵۱۹۶۱۴۱۴۹	۰,۸۷۷۳۷۳۵۲۳۹۲۳۹۸۲	۴,۳۰۹۸ × ۱۰ -۸۹
۹	۰,۸۷۷۳۷۳۵۱۹۶۰۹۷۵۰	۰,۸۷۷۳۷۱۷۳۱۶۰۰۷۴۳	۱,۷۸۸۰ × ۱۰ -۶

جدول ۴: مقایسه جواب عددی و جواب دقیق معادلهٔ (۱,۱)-(۳,۱): L=9، z=2، T=9،
$\Delta t = 0.5$ و $\Delta z = 0.5$.

t	جواب دقیق	جواب عددی	خطا
۱	۰,۹۵۷۱۳۴۲۲۱۲۵۴۱۵۸	۰,۹۵۷۱۳۹۱۰۵۷۷۱۱۵۸	۴,۸۸۴۵ × ۱۰ -۶
۲	۰,۹۵۵۰۰۰۰۵۹۷۹۷۰۹۷	۰,۹۵۵۰۰۰۳۳۲۳۱۲۶۸۴	۲,۷۲۵۲ × ۱۰ -۷
۳	۰,۹۵۴۸۹۳۸۰۶۱۵۴۷۲۶	۰,۹۵۴۸۹۳۸۴۳۲۵۴۰۹۴	۳,۷۰۹۹ × ۱۰ -۸
۴	۰,۹۵۴۸۸۸۵۱۶۰۹۷۳۶۹	۰,۹۵۴۸۸۸۵۴۳۶۷۶۹۱۵	۲,۷۵۸۰ × ۱۰ -۸

t	جواب دقیق	جواب عددی	خطا
۵	۰,۹۵۴۸۸۸۲۵۲۷۲۰۹۲۱	۰,۹۵۴۸۸۸۲۷۹۴۹۲۱۲۹	۲,۶۷۷۱ × ۱۰ -۸
۶	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۹۶۰۸۱۸۰	۰,۹۵۴۸۸۸۲۶۵۸۵۰۶۹۳	۲,۶۲۴۳ × ۱۰ -۸
۷	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۸۹۵۵۳۳۵	۰,۹۵۴۸۸۸۲۶۴۵۹۹۶۳۸	۲,۵۶۴۴ × ۱۰ -۸
۸	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۸۹۲۲۸۳۲	۰,۹۵۴۸۸۸۲۵۸۳۲۹۱۲۷	۱,۹۴۰۶ × ۱۰ -۸
۹	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۸۹۲۱۲۱۴	۰,۹۵۴۸۸۷۶۲۸۶۲۵۳۲۶	۶,۱۰۳۰ × ۱۰ -۷

جدول ۵: مقایسه جواب عددی و جواب دقیق معادلهٔ (۱,۱)-(۳,۱): L=9، z=1، T=9،
$\Delta t = 0.5$ و $\Delta z = 0.5$.

t	جواب دقیق	جواب عددی	خطا
۱	۰,۸۸۳۴۷۸۷۳۳۲۵۷۲۴۳۱	۰,۸۸۳۴۸۵۸۴۲۳۵۲۷۸۶	۷,۱۰۹۸ × ۱۰ -۶
۲	۰,۸۷۷۶۷۷۴۸۰۲۶۴۷۰۴	۰,۸۷۷۷۰۳۸۲۶۴۶۷۸۴۹	۲,۶۳۴۶ × ۱۰ -۵
۳	۸۷۷۳۸۸۶۵۲۹۱۹۴۴۰.۰	۰,۸۷۷۴۲۳۸۷۶۷۶۴۹۰۶	۳,۵۲۲۴ × ۱۰ -۵
۴	۰,۸۷۷۳۷۴۲۷۳۰۵۲۶۵۵	۰,۸۷۷۴۱۰۳۲۵۴۲۵۹۹۵	۳,۶۰۵۲ × ۱۰ -۵
۵	۰,۸۷۷۳۷۳۵۵۷۱۲۱۲۴۴	۰,۸۷۷۴۰۹۶۷۱۲۸۷۵۱۴	۳,۶۱۱۴ × ۱۰ -۵
۶	۰,۸۷۷۳۷۳۵۲۱۴۷۷۱۱۸	۰,۸۷۷۴۰۹۶۳۹۷۰۲۶۲۸	۳,۶۱۱۸ × ۱۰ -۵
۷	۰,۸۷۷۳۷۳۵۱۹۷۰۲۵۰۱	۰,۸۷۷۴۰۹۶۳۵۰۷۰۰۰۸	۳,۶۱۱۵ × ۱۰ -۵
۸	۰,۸۷۷۳۷۳۵۱۹۶۱۴۱۴۹	۰,۸۷۷۴۰۹۶۱۱۹۳۷۲۸۵	۳,۶۰۹۲ × ۱۰ -۵
۹	۰,۸۷۷۳۷۳۵۱۹۶۰۹۷۵۰	۰,۸۷۷۴۰۷۳۶۰۳۰۸۲۶۹	۳,۳۸۴۱ × ۱۰ -۵

جدول ۶: مقایسه جواب عددی و جواب دقیق معادلهٔ (۱,۱)-(۳,۱): T=9 ،z=2 ،L=9، $\Delta t = 0.5$ و $\Delta z = 0.5$.

t	جواب دقیق	جواب عددی	خطا
۱	۰,۹۵۵۰۳۴۴۶۰۰۰۳۶۶۶	۰,۹۵۷۱۴۰۴۸۵۳۳۰۶۳۷	۶,۲۶۴۱× ۱۰ -۶
۲	۰,۹۵۵۰۰۰۰۵۹۷۹۷۰۹۷	۰,۹۵۵۰۳۴۴۶۰۰۰۳۶۶۶	۳,۴۴۰۰× ۱۰ -۵
۳	۰,۹۵۴۸۹۳۸۰۶۱۵۴۷۲۶	۰,۹۵۴۹۳۲۷۲۲۸۲۷۷۲۵	۳,۸۹۱۷× ۱۰ -۵
۴	۰,۹۵۴۸۸۸۵۱۶۰۹۷۳۶۹	۰,۹۵۴۹۲۷۷۹۷۹۹۲۰۲۵	۳,۹۲۸۲× ۱۰ -۵
۵	۰,۹۵۴۸۸۸۲۵۲۷۲۰۹۲۱	۰,۹۵۴۹۲۷۵۶۰۱۷۰۷۱۲	۳,۹۳۰۷× ۱۰ -۵
۶	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۹۶۰۸۱۸۰	۰,۹۵۴۹۲۷۵۴۸۲۰۱۶۲۹	۳,۹۳۰۹× ۱۰ -۵
۷	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۸۹۵۵۳۳۵	۰,۹۵۴۹۲۷۵۴۷۰۰۶۶۰۳	۳,۹۳۰۸× ۱۰ -۵
۸	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۸۹۲۲۸۳۲	۰,۹۵۴۹۲۷۵۳۹۹۶۸۷۱۴	۳,۹۳۰۱× ۱۰ -۵
۹	۰,۹۵۴۸۸۸۲۳۸۹۲۱۲۱۴	۰,۹۵۴۹۲۶۸۲۶۶۸۴۶۲۷	۳,۸۵۸۸× ۱۰ -۵

همان طور که مشاهده می‌شود، با وجود استفاده از تقریب (۹,۱) همچنان جواب‌های ایده‌آلی به دست آورده‌ایم که در این حالت، خطا تقریباً مضربی از 10^{-5} است. هر چند، برای نوشتن مثال‌های کاربردی نیاز به مطالعات و آزمایش‌های گسترده‌ای است تا بتوان مدل‌های احتمالی مناسب و مؤلفه‌های مربوطه را اندازه‌گیری کرد. با این حال، می‌توان با فرضیاتی ساده، مدل‌هایی ساده ایجاد کرد و نتایج این مدل را بررسی کرد.

مثال۲: مدلی برای تعداد گلوله‌های مصرف شده در یک جنگ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید، آهنگ مصرف این گلوله‌ها (α) در سال یا ماه یا روز را به طور تقریبی با تجربه به‌دست می‌آوریم. در این صورت واضح است که با یک فرآیند تصادفی شمارشی با آهنگ ثابت α روبرو هستیم. بهترین مدل برای این فرآیند تصادفی استفاده از فرآیند تصادفی پواسون است. بنابراین، تابع چگالی این مدل را به صورت زیر داریم:

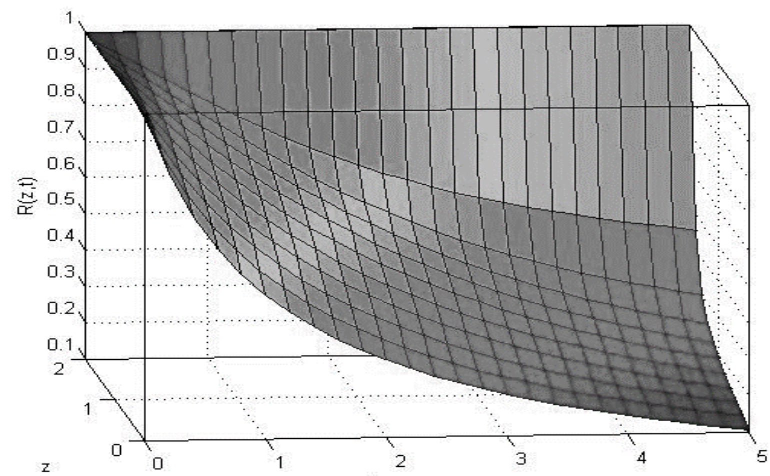
$$b(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad x = 0,1,2,...$$

بدیهی است با کاهش تعداد گلوله‌ها در انباری مشخص، آهنگ خرید گلوله را افزایش و با افزایش

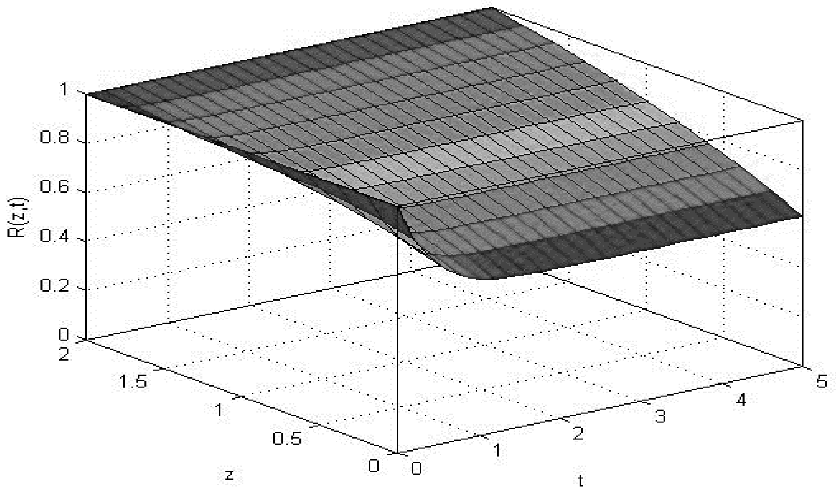
تعداد گلوله‌ها این آهنگ را کاهش دهیم؛ بنابراین، مدل غیرخطی زیر برای این حالت محتمل است:

$$\beta(z)=\gamma_1 e^{-\gamma_2 z}$$

این مدل، معادله انتگرال دیفرانسیل جزئی (۱,۱) را به یک معادلهٔ غیرخطی تبدیل می‌کند. غیرخطی بودن این معادله باعث می‌شود که نتوانیم جواب دقیق را پیدا کنیم؛ بنابراین، روش عددی بیان شده کارایی خود را در این مثال نشان می‌دهد و ما می‌توانیم از آن برای حل این مثال استفاده کنیم و نتایج به دست آمده را بررسی و تفسیر کنیم. با قرار دادن مؤلفه‌های $\alpha=\gamma_1=\gamma_2=1$ و مؤلفه‌های روش عددی $L=2, T=5, \Delta z=0.2, \Delta t=0.2$ جواب تقریبی به دست آمده را می‌توان به شکل نمودار سه بعدی رسم کرد. شکل ۱ این نمودار را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۱، مدیریت مصرف گلوله‌ها ضعیف بوده و با افزایش زمان، سازمان در بحران قرار خواهد گرفت. لذا مؤلفه‌های فوق راهبرد خوبی برای مدیر نیستند. با تغییر دادن مؤلفه‌های خرید به صورت $\gamma_1=2, \gamma_2=0.01$ جواب تقریبی شکل ۲ به دست خواهد آمد که نشان دهندهٔ امنیت در تصمیم‌گیری مدیر است.



شکل ۱: جواب عددی مثال ۲ با مؤلفه‌های $\alpha=\gamma_1=\gamma_2=1$



شکل۲: جواب عددی مثال ۲ با مؤلفه‌های $\gamma_1 = 2, \gamma_2 = 0.01$

بحث و نتیجه‌گیری

همان طور که ملاحظه شد شواهدی بر رد فرضیه تحقیق مبنی بر مدیریت بحران نظامی از طریق حل معادلات انتگرال دیفرانسیل جزئی یافت نشد؛ لذا مدل ارائه شده می‌تواند برای مسائل مدیریت بحران زیر استفاده شود و برای هر کدام باید مؤلفه‌ها و فرضیات جداگانه‌ای در نظر گرفته شود که در مدل متناظر با آزمایش‌ها یا داده‌های آماری موجود به دست می‌آیند.

- مدیریت بحران بودجه نظامی در یک سازمان نظامی در زمان صلح؛
- مدیریت بحران بودجه نظامی در یک سازمان نظامی در زمان جنگ؛
- مدیریت بحران منابع انسانی مورد نیاز در یک سازمان نظامی در زمان صلح؛
- مدیریت بحران منابع انسانی مورد نیاز در یک سازمان نظامی در زمان جنگ؛
- مدیریت بحران تجهیزات نظامی مورد نیاز در یک سازمان نظامی در زمان جنگ؛

- مدیریت بحران تجهیزات نظامی (آهنگ مصرف و خرید آنها) مورد نیاز در یک منطقه جنگی هدف.

بنابراین، این شبیه‌سازی بر پایه احتمال، می‌تواند یک مدیر را از بحران‌های موجود آگاه کند تا این مدیر ریسک و بحران را با تصمیم گیری درست به کمترین مقدار ممکن برساند.

فهرست منابع

اخروی، ا. ح.، پویا، ع.، ناظمی، ش. و مصطفی، ک. (۱۳۹۴)، طراحی الگویی جهت طبقه‌بندی اهداف و تعیین سناریوی درگیری در مدیریت نبرد، *فصلنامه مدیریت نظامی، ۱۵* (۶۰)، ۱-۳۳.

خیر گو، م.، نوربخش، ا. و محمدی، ع. (۱۳۹۵)، ارزیابی و اولویت‌بندی ابعاد کیفیت خدمات آموزشی مبتنی بر الگوی سروکوآل با بهره‌گیری از رویکرد ترکیبی AHP-VIKOR (مطالعه موردی: دانشگاه افسری امام علی(ع)، *فصلنامه مدیریت نظامی، ۱۶* (۶۱)، ۱۱۳-۱۳۴.

ملکی، م. و لطفی ا. (۱۳۹۵)، ارزیابی سطح مدیریت دانش در دانشگاه افسری امام علی(ع)، *فصلنامه مدیریت نظامی، ۱۶* (۱)، ۱۳۵-۱۵۷.

Pervozvansky, A. A. Jr (1998). Equation for survival probability in a finite time interval in case of non-zero real interest force. *Insurance: Mathematics and economics, 23*, 287–295.

Makroglou, A. (2000). Computer treatment of the integro-differential equations of collective non-ruin; the finite time case. *Mathematics and Computers in Simulation*, *54*, 99–112.

Makroglou, A. (2003). Integral equations and actuarial risk management: Some models and numerics. *Mathematical Modelling and Analysis, 8*(2), 143–154.

Peters, C. S., & Mangel, M. (1990). New methods for the problem of collective ruin. *SIAM J. Appl. Math.*, *50*, 1442–1456.

Knessl, C., & Peters, C. S. (1994). Exact and asymptotic solutions for the time dependent problem of collective ruin. *I. SIAM J. Appl. Math.*, *54*, 1745–1767.

Knessl, C., & Peters, C. S. (1996). Exact and asymptotic solutions for the time dependent problem of collective ruin. *II. SIAM J. Appl. Math.*, *56*, 1471–1521.

De Vylder, F. E., & Goovaerts, M. J. (1999). Explicit finite-time and infinite-time ruin probabilities in the continuous case. *Insurance: Mathematics and economics*, *24*, 155–172.

Arfwedson, G. (1950). Some problems in the collective theory of risk. Skand. Aktuar. *Tidskr*, *33*, 1–38.

Seal, H. L. (1978). *Survival probabilities. The goal of risk theory*. John Wiley and Sons.

Seal, H. L. (1978). The numerical calculation of $U(w, t)$, the probability of non-ruin in an interval $(0, t)$. *Scand. Actuarial J.*, 121-139.

Albrecher, H., Teugels, J. L., & Tichy, R. F. (2001). On a gamma series expansion for the time dependent probability of collective ruin. *Insurance: Mathematics and economics*, *29*, 345–355.

Paulsen, J. (1998). Ruin theory with compounding assists- a survey. *Insurance: Mathematics and economics*, *22*, 3–16.

Grandell, J. (1991). *Aspects of risk theory*. Springer-Verlag.

Usabel, M. (1999). Calculating multivariate ruin probability via Gaver-Stehfest inversion technique. Insurance*: Mathematics and economics*, *25*, 133–142.

Pearson, C. M., & Clair, J. A. (1998). Reframing Crises Management. *Academy of Management Review*, *23*, 59-76.

Ignatov, Z. G., Kaishev, V. K., & Krachunov, R. S. (2001). An improved finite-time ruin probability formula and its Mathematic implimentation. *Insurance: Mathematics and economics*, *29*, 375–386.